תרגיל 9 ביסודות תורת הפונקציות המרוכבות

1. הוכח את הנוסחה לחישוב צמודה הרמונית של $u(x,y)$:

$$v(x,y)=\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt-\int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(s,0)\,ds$$

2. הוכח כי הפונקציה $u(x,y)=y\cos y\sinh x+x\sin y\cosh x$ הרמונית, ומצא צמודה הרמונית.

3. נניח כי הפונקציות $v(x,y),u(x,y)$ הרמוניות ב- Ω (נזכור כי הנגזרות החלקיות רציפות). נניח בנוסף כי מתקיימות משוואות קושי-רימן. בהנחה ש $u^2+v^2\neq 0$, הוכח כי:

$$\Delta\left(\frac{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}}{u^2+v^2}\right)=0$$

4. הוכח את הנוסחא לאופרטור לפלס בקאורדינטות קוטביות:

$$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

5. תהא $u(r,\theta)=r\theta\cos\theta+r\sin\theta\ln r$ מוגדרת ב- $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. הראו כי u הרמונית ומצאו צמודה הרמונית ל- u.

6. תהא $U(\xi)$ רציפה וחסומה ב- $\mathbb{R}$. הראו כי $P_U(x,y)$ מייצגת פונקציה הרמונית בחצי המישור העליון כאשר ערכי $U(\xi)$ הם ב- $\mathbb{R}$, אם:

$$P_U(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}U(\xi)\,d\xi$$

7. הוכח כי אם $f(z)$ שלמה ומקיימת $\lim_{z\to\infty} z^{-1}\mathrm{Re}f(z)=0$ אזי $f(z)$ הינה קבועה. רמז: השתמש בנוסחת שוורץ,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R}\frac{\xi+z}{\xi-z}u(\xi)\frac{d\xi}{\xi}+iC$$

8. הראו כי אם $f(z)$ אנליטית ב- $B_{1.1}(0)=\{z:|z|<1.1\}$ ומקיימת $|f(z)|=1$ לכל $|z|=1$ אזי $f(z)$ הינה פונקציה רציונאלית.